EJERCICIOS

1. Dada la aplicación lineal $f_1: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ x-y-z \\ x \end{pmatrix}$, calcular la matriz de f_1 respecto de las bases $B_{11} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio inicial y $B_{12} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio final.

2. Dada la aplicación lineal $f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, cuya matriz respecto de las bases $B_{21} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio inicial y $B_{22} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio final es $M(f_2, B_{21}, B_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de f_2 respecto de las bases canónicas.

3. Dada la aplicación lineal $f_3: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, cuya matriz respecto de la base $B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio inicial y final es $M(f_3, B_3, B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de f_3 respecto de las bases canónicas.

4. Dada la aplicación lineal $f_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya matriz respecto de la base $B_4 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio inicial y final es $M(f_3, B_4, B_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de f_4 respecto de las bases canónicas.

5. Dada la aplicación lineal $f_5: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f_5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3z \\ x+2y \end{pmatrix}$ y las bases $B_{51} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio inicial y $B_{52} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ en el espacio final, calcular:

a. La matriz de f_5 respecto de las bases canónicas en ambos espacios: $M(f_5, B_c^3, B_c^2)$

b. La matriz de f_5 respecto de la base B_{51} en el espacio inicial y la base canónica en el final: $M(f_5, B_{51}, B_c^2)$

c. La matriz de f_5 respecto de la base canónica en el espacio inicial y la base B_{52} en el espacio final: $M(f_5, B_c^3, B_{52})$

d. La matriz de f_5 respecto de la base B_{51} en el espacio inicial y la base B_{52} en el espacio final: $M(f_5, B_{51}, B_{52})$

6. Calcular la matriz, respecto de las bases canónicas, de una aplicación lineal $f_6: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica las siguientes condiciones: $\begin{cases} f_6\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ f_6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_6) \end{cases}$.